

Exercice 1 : Cyclotron Arronax (11 points)

1. Le fonctionnement d'un cyclotron

Un cyclotron est un accélérateur de particules, inventé par M. Lawrence en 1931.

Il est composé de deux cavités métalliques en forme de demi-cylindres éloignées d'une distance notée d . Un canon permet de produire les particules chargées introduites dans le dispositif.

Entre les deux cavités, une tension alternative U est appliquée. Elle crée un champ électrique $\vec{E}$. Les particules utilisées sont des ions H^- obtenus à partir d'atomes d'hydrogène. Ils sont donc soumis, entre les deux cavités à une force électrique $\vec{F}_e$ qui les accélère.

À l'intérieur des deux cavités, un champ magnétique impose un mouvement circulaire uniforme aux particules présentes.

Au bout d'un certain nombre de tours, les ions H^- passent au travers d'un extracteur qui leur enlève leurs deux électrons. À la sortie, les protons H^+ formés sont dirigés vers une cible, pour produire les radioisotopes.

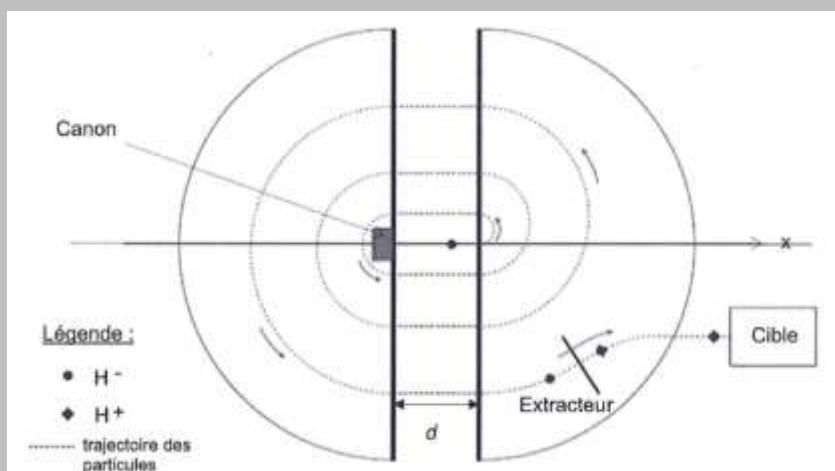


Figure 1 — Schéma simplifié d'un cyclotron

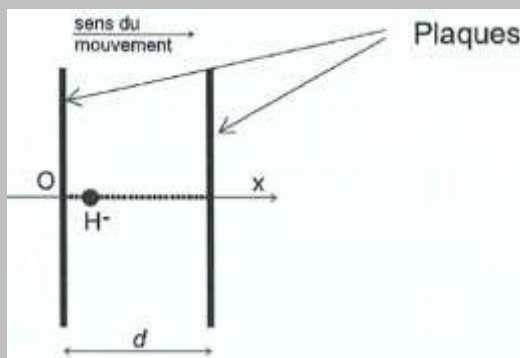


Figure 2 — Agrandissement de la zone accélératrice lors de la sortie de H^- du canon

Le mouvement de l'ion H^- entre les plaques est étudié dans un référentiel supposé galiléen, associé à l'axe (Ox). L'ion H^- est émis au point O sans vitesse initiale.

Données :

- Masse de l'ion H^- : $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$;
- Charge de l'ion H^- : $q = -e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$;
- Distance entre les plaques : $d = 5,0 \text{ mm}$;
- Tension appliquée entre les plaques : $U = 65 \text{ kV}$;
- Valeur du champ électrique : $E = \frac{U}{d}$;
- $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$;
- Intensité du champ de pesanteur $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Q1. Montrer que la valeur de la norme du poids de l'ion H^- est négligeable devant la valeur de la norme de la force électrique $\vec{F}_e$ qui s'applique sur l'ion.

Norme du poids : $P = m \cdot g$.

Norme de la force électrique : $F_e = |q| \cdot E = e \cdot \frac{U}{d}$.

$$\frac{1,6 \times 10^{-19} \times 65 \times 10^3}{5 \times 10^{-3} \times 1,67 \times 10^{-27} \times 9,81} = 1,26963199 \times 10^{14}$$

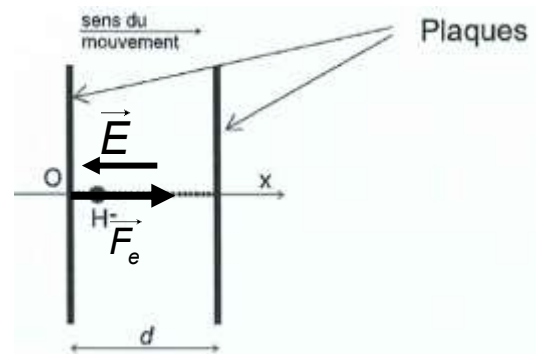
Calculons le rapport : $\frac{F_e}{P} = \frac{e \cdot U}{d \cdot m \cdot g}$ soit $\frac{F_e}{P} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 65 \times 10^3}{5,0 \times 10^{-3} \times 1,67 \times 10^{-27} \times 9,81} = 1,3 \times 10^{14}$.

La force électrique est environ 10^{14} fois plus grande que le poids.
Le poids de l'ion est donc négligeable devant la force électrique.

Q2. Reproduire, sur la copie, la figure 2. Compléter ce schéma en faisant apparaître, sans soucis d'échelle, la force électrique $\vec{F}_e$ qui s'applique sur l'ion H^- et le champ électrique $\vec{E}$ présent dans tout l'espace entre les plaques.

On a $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$ avec $q = -e < 0$ donc $\vec{F}_e$ et $\vec{E}$ sont de sens opposés.

Par ailleurs, le schéma montre que le sens du mouvement de l'ion H^- est orienté vers la droite. Donc, pour accélérer l'ion H^- entre les deux plaques, la force électrique $\vec{F}_e$ doit être orientée vers la droite et le champ électrique $\vec{E}$ doit être orienté vers la gauche.



Q3. Exprimer l'accélération a_x de l'ion H^- dans la zone accélératrice en fonction de e , U , d et m , en utilisant la deuxième loi de Newton.

On applique la deuxième loi de Newton au système {ion H^- }, de masse m et de charge $q = -e$ constantes dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On utilise le repère $(O, \vec{i})$ d'axe Ox orienté vers la droite.

Le poids de l'ion étant négligeable devant la force électrique, on a :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_e = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow -e \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{-e}{m} \cdot \vec{E}$$

Or $\vec{E} = -E\vec{i}$ avec $E = \frac{U}{d}$, on peut donc écrire : $\Leftrightarrow \vec{a} = \left(\frac{-e}{m}\right) \cdot \left(-\frac{U}{d} \cdot \vec{i}\right) \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot \vec{i}$

En projection suivant l'axe Ox , il vient : $a_x = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}$.

Q4. Montrer alors que la vitesse et la position de l'ion H^- lors du passage dans la zone accélératrice, sur l'axe x , peuvent s'écrire :

$$v_x(t) = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \times t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \times \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \times t^2$$

On a : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. En projection sur l'axe Ox il vient : $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}$.

En primitivant : $v_x(t) = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t + Cte1$.

L'ion H^- est émis au point O sans vitesse initiale ainsi : $v_x(0) = 0 + Cte1 = 0$ donc $Cte1 = 0$.

Finalement : $v_x(t) = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t$

On a : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$. En projection sur l'axe Ox il vient : $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t$.

En primitivant : $x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t^2 + Cte2$.

L'ion H^- est émis au point O ainsi : $x(0) = 0 + Cte2 = 0$ donc $Cte2 = 0$.

Finalement : $x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t^2$

Q5. Calculer la valeur de la vitesse v_{sortie} de l'ion H^- après le premier passage dans la zone accélératrice lorsque $x(t) = d$.

Soit t_s la date pour laquelle l'ion a parcouru la distance d .

On a $x(t_s) = d$ soit : $x(t_s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t_s^2 = d \Leftrightarrow t_s^2 = \frac{2m \cdot d^2}{e \cdot U}$.

En ne conservant que la solution positive : $t_s = \sqrt{\frac{2m \cdot d^2}{e \cdot U}}$ soit $t_s = d \cdot \sqrt{\frac{2m}{e \cdot U}}$.

On reporte l'expression de t_s dans celle de $v_x(t)$ pour calculer v_{sortie} :

$v_{\text{sortie}} = v_x(t_s) = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t_s \Leftrightarrow v_{\text{sortie}} = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2m}{e \cdot U}} = \sqrt{\frac{(e \cdot U)^2 \cdot 2m}{m^2 \cdot e \cdot U}}$ finalement : $v_{\text{sortie}} = \sqrt{\frac{2e \cdot U}{m}}$.

$v_{\text{sortie}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,60 \times 10^{-19} \times 65 \times 10^3}{1,67 \times 10^{-27}}} = 3,5 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

($v_{\text{sortie}} < c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

$$\sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 65 \times 10^3}{1.67 \times 10^{-27}}} = 3529176.932$$

Q6. Vérifier que l'énergie cinétique de l'ion H^- à la sortie de la zone accélératrice vaut $E_c = 1,0 \times 10^{-14} \text{ J}$.

$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{sortie}}^2$

soit $E_c = \frac{1}{2} \times 1,67 \times 10^{-27} \times (3,529... \times 10^6)^2 \text{ J} = 1,04 \times 10^{-14} \text{ J} \approx 1,0 \times 10^{-14} \text{ J}$.

À chaque passage entre les plaques, les particules gagnent une énergie cinétique égale à $E_c = 1,0 \times 10^{-14} \text{ J}$. Par contre, les particules n'acquièrent pas d'énergie cinétique dans les cavités. En sortie du cyclotron, les particules possèdent une énergie cinétique de 70 MeV.

Q7. Calculer le nombre de tours complets que les particules ont effectués avant la sortie du cyclotron.

Pour cette question, le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et doit être correctement présentée.

L'énergie cinétique en sortie du cyclotron est :

$E_{c,s} = 70 \text{ MeV} = 70 \times 10^6 \text{ eV} = 70 \times 10^6 \times 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$.

À chaque passage entre les plaques, l'ion gagne une énergie cinétique $E_c = 1,0 \times 10^{-14} \text{ J}$.

Le nombre de passages de l'ion entre les plaques est donc : $N_{\text{plaques}} = \frac{E_{c,s}}{E_c}$.

Mais, lors d'un tour complet dans le cyclotron, il y a deux passages dans la zone accélératrice.

Le nombre de tours N_{tours} dans le cyclotron est alors : $N_{\text{tours}} = \frac{N_{\text{plaques}}}{2} = \frac{E_{c,s}}{2E_c}$.

$N_{\text{tours}} = \frac{70 \times 10^6 \times 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}}{2 \times 1,0 \times 10^{-14} \text{ J}} = 560 \text{ tours}$.

2. La production de radioisotope et la scintigraphie

Données :

- Informations sur quelques éléments chimiques :

Nom de l'élément	Oxygène	Fluor
Symbole	O	F
Numéro atomique	8	9

- L'énergie d'un photon est liée à la longueur d'onde du rayonnement émis par la relation :

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

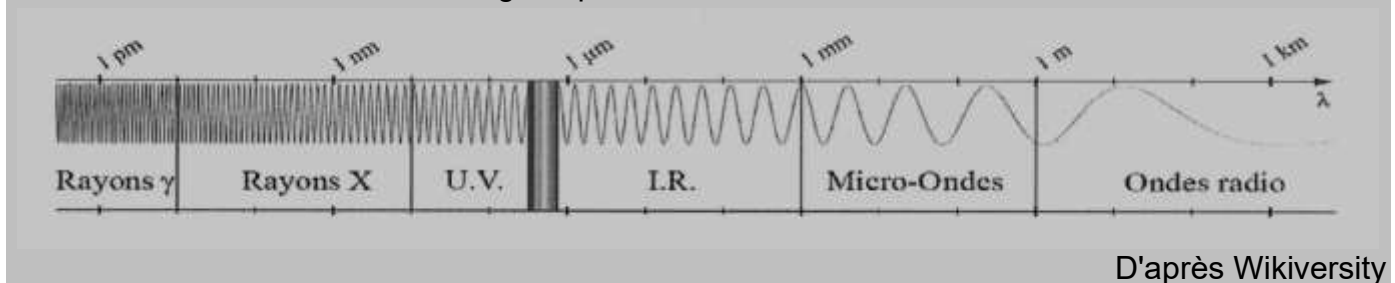
avec : h , la constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$;

λ , la longueur d'onde du rayonnement ;

c , la célérité des ondes électromagnétiques dans l'air et dans le vide, supposée connue.

- $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$;

- Domaines des ondes électromagnétiques :



Les protons accélérés par le cyclotron permettent la production de radioisotopes comme le fluor 18. Le fluor 18 radioactif entre dans la composition du fluorodésoxyglucose (FDG), un traceur radioactif qui s'accumule dans les zones cancéreuses. La désintégration de ce traceur émet des photons. Ceux-ci sont captés et analysés grâce à une gamma-caméra, placée autour de la zone à étudier.

La scintigraphie est réalisée dans un service hospitalier de médecine nucléaire, lors d'un examen en plusieurs étapes :

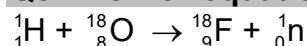
- injection dans une veine d'une petite quantité du traceur radioactif ;
- attente d'environ 1 h pour la diffusion et la fixation du traceur dans l'organisme ;
- enregistrement et production de clichés de l'organe à étudier puis analyse de ces clichés. Cette étape dure environ 30 minutes ;
- sortie du patient de l'hôpital 2 h après le début de l'examen.



arronax-nantes.fr/production-des-radionucleides

Pour former le fluor 18, les protons H^+ (dont la représentation symbolique est ${}^1_1\text{H}$) accélérés par le cyclotron bombardent une cible riche en oxygène 18. Lors de cette réaction, un neutron (noté ${}_0^1\text{n}$) est également produit.

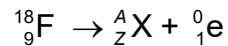
Q8. Écrire l'équation de la réaction nucléaire conduisant à la formation du fluor 18.



Le fluor 18 contenu dans le traceur radioactif se désintègre par radioactivité β^+ .

Q9. Donner le nom et le symbole de la particule émise lors d'une désintégration radioactive β^+ . Écrire l'équation de la transformation nucléaire qui correspond à cette désintégration.

Lors d'une désintégration β^+ la particule émise est un positon (ou positron) de symbole : ${}^0_1\text{e}$.



En appliquant les lois de conservation de Soddy :

Conservation du nombre de masse : $18 = A + 0$ donc **A = 18**.

Conservation du nombre de charge : $9 = Z + 1$ donc **Z = 8**.

Finalement : ${}^{18}_9\text{F} \rightarrow {}^{18}_8\text{O} + {}^0_1\text{e}$

Cette désintégration est accompagnée de l'émission de photons dont l'énergie moyenne est de 511 keV.

Q10. Calculer la longueur d'onde correspondant à l'énergie moyenne transportée par le photon. Justifier alors l'utilisation d'une gamma-caméra pour analyser ce rayonnement.

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{h \cdot c}{E}} \quad \text{soit } \lambda = \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8}{511 \times 10^3 \times 1,60 \times 10^{-19}} \text{ m} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m} = 2,43 \text{ pm}.$$

D'après le diagramme des domaines des ondes électromagnétiques, cette longueur d'onde correspond aux rayons gamma γ . C'est la raison pour laquelle on doit utiliser une gamma-caméra pour analyser ce rayonnement.

Pour la suite, on note N_0 le nombre de noyaux de fluor 18 contenu dans le traceur à l'instant $t = 0$ s, correspondant au moment de l'injection et on note $N(t)$, le nombre de noyaux de fluor 18 présent dans le corps du patient à la date t .

L'équation différentielle donnant le nombre de noyaux $N(t)$ en fonction du temps est de la forme :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \times N(t) \quad \text{avec } \lambda \text{ constante de radioactivité.}$$

Q11. Montrer que l'expression $N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$ est bien solution de l'équation différentielle précédente.

$$\text{Calculons : } \frac{dN}{dt} = \frac{d(N_0 \times e^{-\lambda t})}{dt} = N_0 \times \frac{d(e^{-\lambda t})}{dt} = N_0 \times (-\lambda) e^{-\lambda t} = -\lambda \times N_0 \times e^{-\lambda t} = -\lambda N(t)$$

On retrouve bien l'équation différentielle : $\frac{dN}{dt} = -\lambda \times N(t)$.

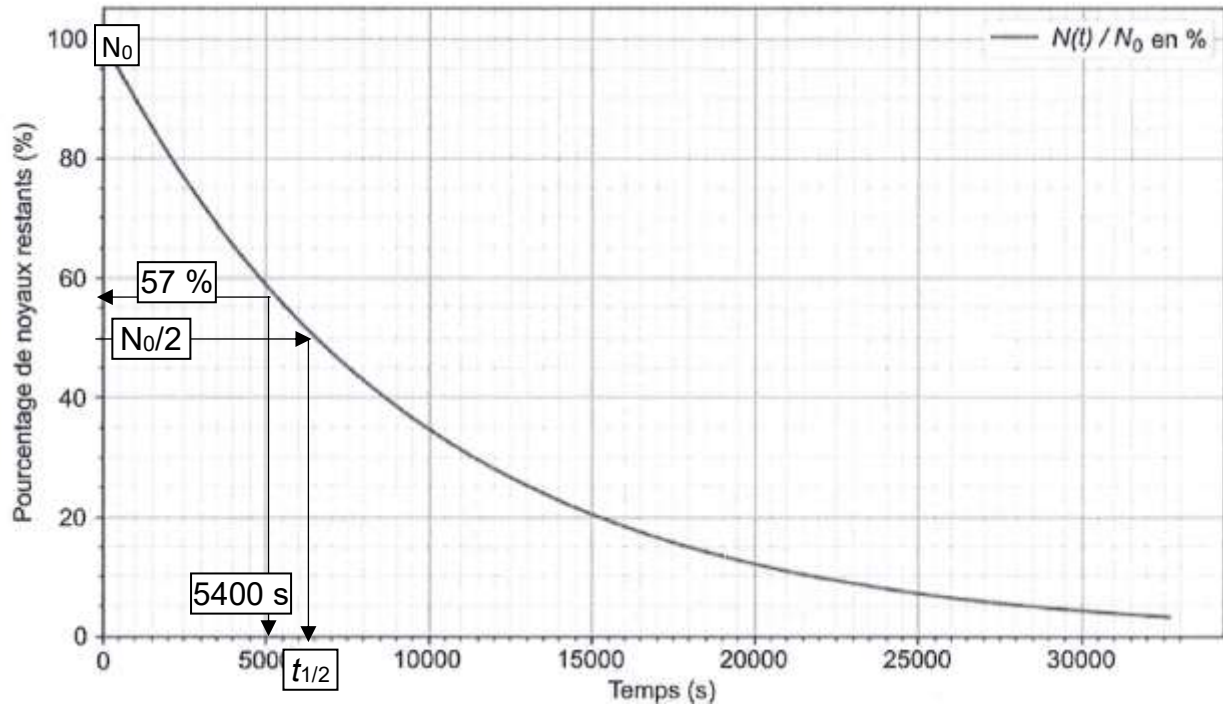
L'expression $N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$ est bien solution de l'équation différentielle.

La représentation graphique ci-dessous est la modélisation du pourcentage de noyaux restants ($N(t)/N_0$) au cours du temps.

La relation entre la constante radioactive λ et le temps de demi-vie est : $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

Q12. Définir puis déterminer graphiquement la valeur du temps de demi-vie $t_{1/2}$ du fluor 18.

Le temps de demi-vie est la durée pour laquelle le nombre initial de noyaux radioactifs d'une population a été divisé par deux soit : $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$.



Graphiquement on lit : $t_{1/2} \approx 6500 \text{ s}$.

Q13. Calculer la valeur de la constante radioactive λ correspondant au fluor 18.

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \text{ soit } \lambda = \frac{\ln(2)}{6500\text{s}} = 1,066 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

Q14. Déterminer le pourcentage de traceur radioactif restant dans le corps du patient après l'analyse des clichés.

Entre l'injection du radiotraceur et l'analyse des clichés il s'est écoulé 1 h 30 min (1 h + 30 min) soit 90 min = 90×60 s = **5400 s**.

Graphiquement, pour $t = 5400 \text{ s}$, on lit un pourcentage de radiotraceur restant égal à **57 %**.

Q15. Calculer la valeur de la durée nécessaire pour qu'il reste moins de 1 % de traceur radioactif dans le corps du patient. Commenter cette valeur.

On cherche la durée t telle que : $N(t) < \frac{1}{100} \times N_0 \Leftrightarrow \frac{N(t)}{N_0} < 0,01$.

$$\text{D'où : } e^{-\lambda t} < 0,01 \Leftrightarrow \ln(e^{-\lambda t}) < \ln(0,01) \Leftrightarrow -\lambda \cdot t < \ln(0,01) \Leftrightarrow t > -\frac{\ln(0,01)}{\lambda}$$

$$t > -\frac{\ln(0,01)}{\frac{\ln(2)}{6500\text{s}}} = 4,3 \times 10^4 \text{ s} \approx 12 \text{ h}.$$

$\frac{\ln(0.01)}{\frac{\ln(2)}{6500}}$	...
43 185.06523	

Cette durée est relativement courte. Le traceur radiotraceur ne reste qu'une demi-journée dans l'organisme ce qui limite les risques liés à l'irradiation du patient et de ses proches.

Merci de nous signaler la présence d'erreurs à labolycee@labolycee.org

1. Mode opératoire de l'estérification

La synthèse de l'ester étudié est réalisée avec le protocole expérimental suivant :

- introduire 0,150 mol d'acide éthanóique pur et 0,150 mol d'éthanol pur dans un ballon ;
- ajouter un volume de 0,5 mL d'acide sulfurique concentré et quelques grains de pierre ponce ;
- adapter un réfrigérant à eau ;
- chauffer l'ensemble à reflux pendant 1 h. Laisser refroidir le mélange réactionnel.

Données :

Masses molaires atomiques :
 - $M(\text{H}) = 1,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$;
 - $M(\text{C}) = 12,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$;
 - $M(\text{O}) = 16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

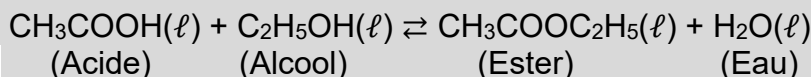
Q.1. Choisir parmi les montages ci-dessus un montage adapté à la synthèse de l'ester. Indiquer l'intérêt de l'élément 1 et celui de l'élément 2 sur le montage choisi.

Le montage 2 correspond à un montage de chauffage à reflux.

L'élément 1 est un chauffe-ballon qui permet d'augmenter la température. Or celle-ci est un facteur cinétique, ainsi on augmente la vitesse de réaction.

L'élément 2 est un réfrigérant à boules, il refroidit les vapeurs formées qui retombent dans le ballon sous forme liquide. Ainsi on évite les pertes de matière.

L'équation de la réaction modélisant l'estérification étudiée est la suivante :



Q.2. Indiquer le rôle de l'acide sulfurique $\text{H}_2\text{SO}_4(\text{aq})$ et l'intérêt de son ajout.

L'acide sulfurique n'apparaît pas dans l'équation de la réaction. C'est un catalyseur, qui permet d'augmenter la vitesse de réaction.

Q.3. Calculer la valeur de la masse d'ester si la réaction était totale.

Le candidat peut éventuellement s'aider d'un tableau d'avancement.

D'après l'équation de la réaction la consommation d'une mole d'alcool conduit à la formation d'une mole d'ester de formule brute $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$.

$$n_{\text{alcool}} = n_{\text{ester}}$$

$$n_{\text{alcool}} = \frac{m_{\text{ester}}}{M_{\text{ester}}}$$

$$m_{\text{ester}} = n_{\text{alcool}} \cdot M_{\text{ester}}$$

$$m_{\text{ester}} = 0,150 \times (4 \times 12,0 + 8 \times 1,0 + 2 \times 16,0) = 0,150 \text{ mol} \times 88,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} = 13,2 \text{ g d'ester au maximum.}$$

2. L'estérification : une réaction non totale

Pour cette réaction, le quotient de réaction Q_r peut s'écrire : $Q_r = \frac{n_{\text{ester}} \times n_{\text{eau}}}{n_{\text{acide}} \times n_{\text{alcool}}}$.

Q.4. Rappeler la définition du taux d'avancement τ . Montrer ensuite que la constante d'équilibre K de l'estérification étudiée peut s'écrire : $K = \frac{\tau^2}{(1-\tau)^2}$.

Par définition $\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$

équation chimique		Acide	+	Alcool	$\rightleftharpoons$	Ester	+	Eau
État du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)						
État initial	$x = 0$	n_0		n_0		0		0
En cours de transformation	x	$n_0 - x$		$n_0 - x$		x		x
État final équilibre	x_f	$n_0 - x_f$		$n_0 - x_f$		x_f		x_f
État final si totale	x_{max}	$n_0 - x_{max} = 0$		$n_0 - x_{max} = 0$		x_{max}		x_{max}

$$Q_r = \frac{n_{ester} \times n_{eau}}{n_{acide} \times n_{alcool}} \text{ ainsi dans l'état final d'équilibre } Q_{r,eq} = K = \frac{(n_{ester})_f \times (n_{eau})_f}{(n_{acide})_f \times (n_{alcool})_f}$$

D'après le tableau $(n_{ester})_f = (n_{eau})_f = x_f$ et $(n_{acide})_f = (n_{alcool})_f = n_0 - x_f$

$$K = \frac{x_f \cdot x_f}{(n_0 - x_f) \cdot (n_0 - x_f)}$$

D'après le tableau $x_{max} = n_0$ et $\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$, donc $\tau = \frac{x_f}{n_0}$ ainsi $x_f = \tau \cdot n_0$

$$K = \frac{\tau \cdot n_0 \cdot \tau \cdot n_0}{(n_0 - \tau \cdot n_0) \cdot (n_0 - \tau \cdot n_0)} = \frac{n_0^2 \cdot \tau^2}{n_0(1-\tau) \cdot n_0(1-\tau)} = \frac{\tau^2}{(1-\tau)^2}$$

La relation précédente peut s'écrire sous la forme : $(K - 1) \cdot \tau^2 + 2K \cdot \tau + K = 0$

Pour l'estérification étudiée, à la température du milieu réactionnel, la constante d'équilibre K est égale à 4,0. Le traitement mathématique du polynôme précédent donne deux solutions :

$$\tau_1 = 0,67 \text{ et } \tau_2 = 2,0$$

Q.5. Choisir, en justifiant, parmi les deux solutions τ_1 et τ_2 , le taux d'avancement final réel de cette réaction.

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} \text{ or } x_f \leq x_{max} \text{ donc } \tau \leq 1$$

Le taux d'avancement final réel est donc $\tau_1 = 0,67$.

Q.6. Déterminer la valeur de la masse d'ester produit lors de cette synthèse.

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{n_{ester}}{n_{alcool}} = \frac{n_{ester}}{n_0}$$

$$n_{ester} = \tau \cdot n_0$$

$$m_{ester} = \tau \cdot n_0 \cdot M_{ester}$$

$$m_{ester} = 0,67 \times 0,150 \times 88,0 = 8,8 \text{ g d'ester}$$

Un chimiste souhaite optimiser le rendement ρ de cette estérification en changeant des paramètres expérimentaux.

Q.7. Proposer deux modifications permettant d'atteindre cet objectif.

Le chimiste peut utiliser le montage 3. C'est un Dean-Stark qui permet d'éliminer l'eau au fur et à mesure de sa formation.

Il peut aussi mettre un des deux réactifs en large excès.

Votre relecture nous est précieuse, merci de nous signaler la présence d'éventuelles erreurs à labolycee@labolycee.org.